

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 678.021

DOI: 10.52190/2073-2562_2023_4_22

END: ARUVSH

Алгоритм расчета эффективных упругих характеристик анизотропных структур армированных пластиков с использованием программных комплексов САЕ

Д. А. ТРОФИМОВ; И. Д. СИМОНОВ-ЕМЕЛЬЯНОВ, д-р техн. наук
ФГБОУВО «МИРЭА — Российский технологический университет»
(Институт тонких химических технологий имени М. В. Ломоносова), Москва, Россия

С. И. ШАЛГУНОВ, канд. хим. наук; В. И. СОКОЛОВ, д-р техн. наук
АО «НПО Стеклопластик», пос. Андреевка, Московская обл., Солнечногорский р-н, Россия

Впервые предложен алгоритм расчета упругих характеристик ортотропной модели анизотропных структур с использованием программных комплексов САЕ. Алгоритм основывается на определении эффективных упругих характеристик элементарной 3D-ячейки армирующего полимерного композиционного материала произвольной структуры с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Алгоритм характеризуется высокой точностью определения всех девяти характеристик ортотропной модели исследуемой структуры.

Ключевые слова: упругие характеристики, ортотропная модель, САЕ, МКЭ, армированные полимерные композиционные материалы.

Точный и надежный способ расчета (определения) эффективных упругих характеристик произвольной структуры анизотропного материала всегда является целью конструкторов и исследователей армированных полимерных композиционных материалов (АрПКМ).

В общем случае эта задача требует решения задачи теории упругости по определению напряженно-деформированного состояния в многосвязной области полимерная матрица—армирующий материал. Наиболее полно известные на сегодняшний день подходы для решения данной задачи представлены в работах [1, 2].

Трофимов Дмитрий Александрович, аспирант.

E-mail: d.trofimov@npostek.ru

Симонов-Емельянов Игорь Дмитриевич, заведующий кафедрой "Химия и технологии переработки пластмасс и полимерных композитов", профессор.

E-mail: simonov@mitht.ru

Шалгунов Сергей Иосифович, директор ВНИИ стеклопластиков и стекловолокна.

E-mail: s.shalgunov@npostek.ru

Соколов Владимир Иванович, начальник отдела композитов радиотехнического назначения.

E-mail: V.Sololov45@mail.ru

Статья поступила в редакцию 14 июля 2023 г.

© Трофимов Д. А., Симонов-Емельянов И. Д., Шалгунов С. И., Соколов В. И., 2023

Ввиду сложности общей задачи известные подходы основываются на определенных допущениях, позволяющих получить решение в аналитическом виде. Наиболее широко используют приближение Фойгта, дающее верхнюю оценку, и приближение Рейсса, дающее нижнюю оценку значений модулей упругости анизотропной структуры в разных направлениях. Разница между этими оценками получила название вилки Хилла, а истинные значения модулей упругости лежат где-то внутри данного диапазона.

Однако даже при таких приближениях известные решения ограничиваются решением задачи лишь для простейших однонаправленных структур.

Предлагаемый в данной статье алгоритм позволяет находить достаточно точные значения упругих характеристик для любой произвольной структуры АрПКМ.

На практике задача несколько усложняется, поскольку принципиально важным при исследовании таких материалов является необходимость определения не только характеристик АрПКМ как функции структуры и формы переплетения элементов, составляющих армирующий материал, а также и расположения армирующих элементов структуры непосредственно в реальном АрПКМ и изделии, например, с учетом степени упрессовки (сжатия)

армирующего материала, которая может изменяться в технологическом процессе.

Комплексный подход, предложенный в работе [3], позволяет получать 3D-модели любых реальных структур АрПКМ, эффективные характеристики, которых можно определять методами МКЭ (FEM), как самыми распространенными инструментами, обладающими достаточными вычислительными ресурсами для решения таких задач.

В соответствии с разработанными методическими подходами [4], определяют следующие упругие характеристики ортотропных анизотропных материалов в ортогональной системе координат (x, y, z) :

- модули упругости сжимающих (растягивающих) напряжений E_x, E_y, E_z ;
- коэффициенты Пуассона сжимающих (растягивающих) напряжений $\mu_{xy}, \mu_{yz}, \mu_{xz}$;
- модули сдвига G_{xy}, G_{yz}, G_{xz} .

В данной статье авторы предлагают алгоритм для расчета этих упругих характеристик с помощью МКЭ по 3D-модели элементарной структурной ячейки АрПКМ без каких-либо дополнительных допущений и приближений с полным соблюдением всех условий деформации этой модели в соответствии с законом Гука.

Определение параметров нормальных (сжимающих–растягивающих) упругих характеристик

Для решения поставленной задачи зададим, что исследуемая элементарная ячейка анизотропного ортотропного материала представляет собой параллелепипед с шестью гранями и подвергается одноосному сжатию (растяжению) в соответствии с условиями классического эксперимента Гука, как представлено в работе [1].

Ключом к решению поставленной задачи является анализ и правильное задание граничных условий.

В контексте поставленной задачи все граничные условия можно условно разделить на 3 основные группы.

1. Фиксация элементарной ячейки в пространстве.
2. Обеспечение геометрических условий деформации элементарной ячейки в соответствии с законом Гука.
3. Задание внешних воздействий или деформаций элементарной ячейки.

Следует отметить, что традиционные решения задач определения напряженно-деформированного состояния инструментами САЕ ограничиваются лишь первой и третьей группами ограничений.

Необходимость введения второй группы граничных условий для решения данной задачи продемонстрирована на рис. 1, на котором представлена "утрированная" деформация элементарной ячейки слоистой структуры, состоящей из слоев разных материалов, без соблюдения второй группы перечисленных граничных условий.

Из рис. 1 видно, что анизотропность структуры элементарной ячейки в классическом исследовании вызывает деформации элементарной ячейки, несоответствующие поведению такой ячейки внутри тела АрПКМ, подверженного внешним нагрузкам.

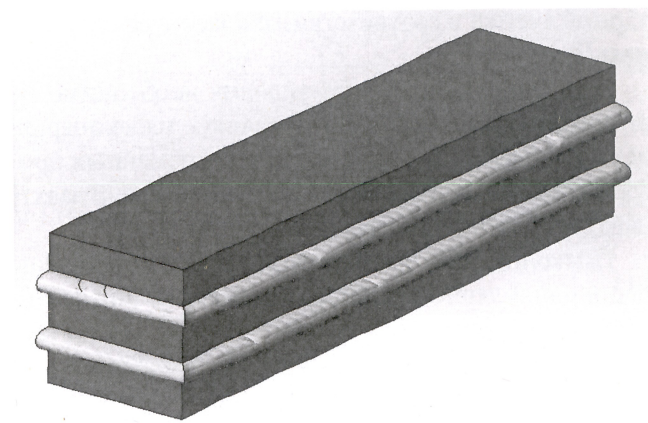


Рис. 1. Деформации слоистой структурной ячейки без граничных условий второй группы

Три другие грани (U , L и R), сходящиеся в вершине, находящейся на противоположном конце главной диагонали рассматриваемой элементарной ячейки, представлены на рис. 2.

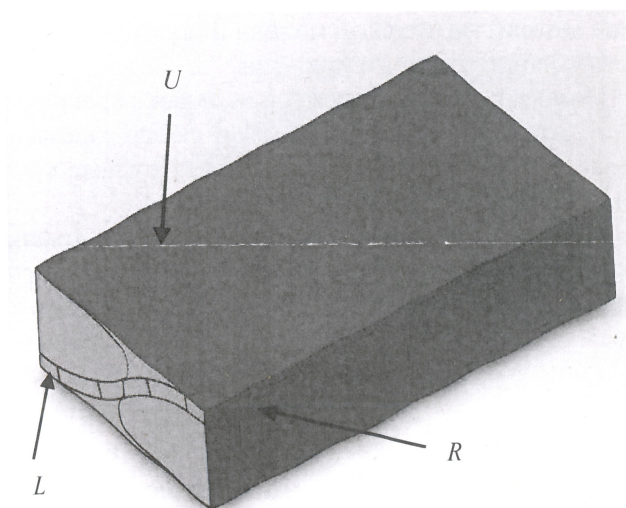


Рис. 2. Грани, задающие деформацию исследуемой элементарной структурной ячейки АрПКМ

В связи с этим рассмотрим все эти группы граничных условий более подробно.

К первой группе указанных граничных условий можно отнести довольно очевидные и наиболее часто встречающиеся в исследованиях САЕ ограничения к трем граням, сходящимся в одной вершине элементарной ячейки, для перемещений в направлениях, перпендикулярных к этим граням (невидимы на рис. 2).

Применение этой группы граничных условий фиксирует элементарную ячейку в пространстве и ее вращательные степени свободы, что полностью соответствует ее поведению, как элементарной ячейки тела АрПКМ при внешнем нагружении.

Вторая группа граничных условий необходима для того, чтобы обеспечить деформации элементарной ячейки в соответствии с классическим законом Гука.

Для выполнения этого условия необходимо на этих трех гранях (U , R , L) задавать плоскопараллельные перемещения, так как в современных программах САЕ только таким способом можно задать нагрузку без деформации поверхности грани.

Поскольку такие деформации также направлены перпендикулярно указанным граням, то они выбирают все оставшиеся степени свободы элементарной ячейки, и задача становится предопределенной.

Решатель САЕ, безусловно, решит и такую задачу, однако она не будет соответствовать поставленной задаче и содержать необходимое решение.

По этой причине третья группа граничных условий, касающаяся соблюдения необходимого баланса напряжений внутри элементарной ячейки, становится дополнительным условием, требующим формулировки критерия соответствия расчетной модели физической модели и подбора условий для выполнения этого критерия.

Аналитические возможности любого программного модуля САЕ позволяют при любых заданных деформациях определять силы, приложенные к любым граням исследуемого тела.

Таким образом, задача расчета упругих характеристик элементарной ячейки при одноосном нагружении сводится к заданию таких деформаций этих трех граней, когда на двух из них L и R значения сил равны нулю.

Тогда относительные перемещения на этих гранях определяют коэффициенты Пуассона μ_{xy} , μ_{xz} в соответствующих направлениях, а значение силы на грани U и ее относительное смещение определит модуль упругости E_x в направлении оси, перпендикулярной этой грани.

В дальнейших рассуждениях примем, что сила прикладывают к верхней грани U , а нулевые усилия должны быть обеспечены на левой L и R гранях (см. рис. 2).

Подбор перемещений левой и правой граней, обеспечивающих нулевые усилия на них, с математической точки зрения является задачей поиска нулевого значения функции двух переменных, и без математического анализа может занять очень много времени, или вообще стать неразрешимой.

Некоторые приложения САЕ имеют надстройки для решения подобных задач численными методами, так как уравнение Гука линейно, данная задача может быть решена инструментами линейной алгебры.

Для достижения поставленной цели рассмотрим систему координат пространства заданных параметров и определим алгоритм поиска решения данной задачи.

Исходя из изложенного получаем систему координат пространства решений поставленной задачи (рис. 3):

- l — перемещение левой грани элемента;
- r — перемещение правой грани элемента;
- f — усилие на грани элемента, соответственно, f_l на левой, а f_r на правой грани.

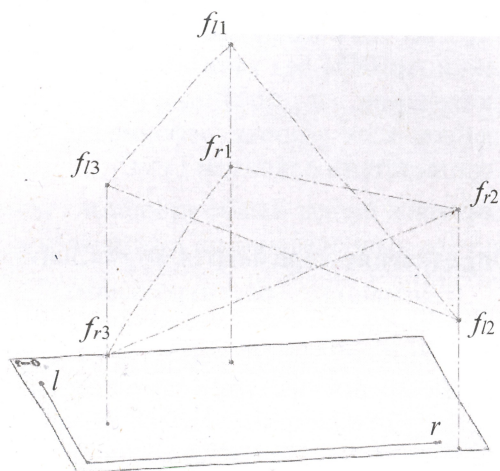


Рис. 3. Пространство решений значений напряжений на боковых гранях исследуемой элементарной ячейки АрПКМ в зависимости от значений их перемещений

Каждый проведенный расчет (напряженно-деформированное состояние элементарной ячейки) дает две точки в рассмотренной системе координат (r_i, l_i, f_{li}) и (r_i, l_i, f_{ri}) .

Учитывая, что уравнение Гука, связывающее напряжения (усилия) и перемещения, линейно, то точки, отображающие результаты расчетов, образуют плоскость.

Таким образом, имеется две плоскости:

$$f_l = f(r, l), \quad (1)$$

для значений усилий на левой грани элемента, и

$$f_r = f(r, l), \quad (2)$$

для значений усилий на правой грани элемента.

Так как плоскость полностью определена тремя точками, то для решения необходимо всего 3 варианта расчета или три соответствующих им напряженно-деформированных состояния элементарной ячейки с разными значениями (r, l) .

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки, запишем как [5]:

$$Al + Br + Cf + D = 0, \quad (3)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} r_1 & f_1 & 1 \\ r_2 & f_2 & 1 \\ r_3 & f_3 & 1 \end{vmatrix} = r_2 f_3 - r_3 f_2 - r_1 f_3 + r_3 f_1 + r_1 f_2 - r_2 f_1 \quad (4)$$

$$B = \begin{vmatrix} f_1 & l_1 & 1 \\ f_2 & l_2 & 1 \\ f_3 & l_3 & 1 \end{vmatrix} = f_2 l_3 - f_3 l_2 - f_1 l_3 + f_3 l_1 + f_1 l_2 - f_2 l_1 \quad (5)$$

$$C = \begin{vmatrix} l_1 & r_1 & 1 \\ l_2 & r_2 & 1 \\ l_3 & r_3 & 1 \end{vmatrix} = l_2 r_3 - l_3 r_2 - l_1 r_3 + l_3 r_1 + l_1 r_2 - l_2 r_1 \quad (6)$$

$$D = - \begin{vmatrix} l_1 & r_1 & f_1 \\ l_2 & r_2 & f_2 \\ l_3 & r_3 & f_3 \end{vmatrix} = - (l_1 r_2 f_3 - l_1 r_3 f_2 - l_2 r_1 f_3 + l_2 r_3 f_1 + l_3 r_1 f_2 - l_3 r_2 f_1) \quad (7)$$

Искомое решение должно удовлетворять условию:

$$f_l = f_r = 0, \quad (8)$$

т. е. лежать на линии пересечения плоскостей (1), (2) и в плоскости $f = 0$.

Для нахождения координаты точки пересечения этих плоскостей нужно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_l l + B_l r + C_l f + D_l = 0 \\ A_r l + B_r r + C_r f + D_r = 0 \\ f = 0 \end{cases} \quad (9)$$

или

$$\begin{cases} A_l l + B_l r + D_l = 0 \\ A_r l + B_r r + D_r = 0 \end{cases} \quad (10)$$

В результате, имеется два линейных уравнения с двумя неизвестными.

После несложных типовых преобразований получим соотношения для искомых величин r и l :

$$r = \frac{\frac{D_r A_l}{A_r} - D_l}{B_l - \frac{B_r A_l}{A_r}}; \quad l = \frac{-B_l r - D_l}{A_l} \quad (11)$$

Таким образом, для получения результата по предлагаемому алгоритму требуется провести три расчета и четвертый поверочный для r и l , определенных по уравнению (11), для того, чтобы убедиться в отсутствии усилий на боковых гранях L и R элементарной ячейки. Затем следует рассчитать значения искомого модуля упругости вдоль заданной оси нагружения и соответствующих коэффициентов Пуассона.

Опираясь на классический закон Гука, схема которого приведена на рис. 4, искомые значения эффективных характеристик для исследуемой анизотропной структуры могут быть вычислены по следующим соотношениям:

$$E_x = \frac{Fx}{y z \Delta x}, \quad (12)$$

$$\mu_{xy} = \frac{x \Delta y}{y \Delta x}, \quad (13)$$

$$\mu_{xz} = \frac{x \Delta z}{z \Delta x}, \quad (14)$$

- где x — длина образца вдоль оси приложения нагрузки;
- y, z — длины образца поперек оси приложения нагрузки;
- Δx — деформация образца вдоль оси приложения нагрузки;
- $\Delta y, \Delta z$ — изменения длины образца поперек оси приложения нагрузки;
- F — сила сжатия;
- μ — коэффициент Пуассона материала образца.

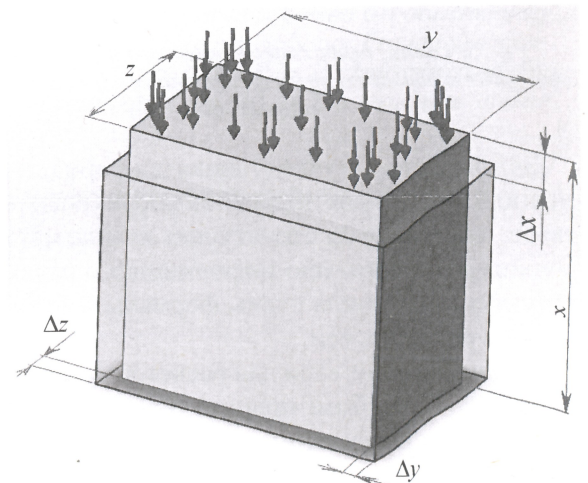


Рис. 4. Схема эксперимента Гука по одноосному сжатию элементарной ячейки АрПКМ

Изменяя выбор граней можно провести такое нагружение в направлении любой из осей координат.

Как было показано ранее [3], данный метод позволяет рассчитывать показатели нормальных упругих характеристик любых анизотропных структур с достаточно высокой точностью и с погрешностью менее $\sim 0,01\%$.

Определение сдвиговых характеристик

$$G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$$

В случае изотропного материала определение модуля упругости при сдвиге не является независимой задачей [6], и его значение может быть получено из эксперимента сжатие—растяжение с использованием известного соотношения:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (15)$$

Для анизотропной ортотропной модели АрПКМ ситуация существенно сложнее, и для определения этих характеристик требуется отдельный расчетный эксперимент с использованием методов САЕ.

В основе такого эксперимента может лежать известная схема эквивалентности напряжений сдвига и напряжений одновременного сжатия—растяжения в двух взаимно перпендикулярных направлениях с равными значениями напряжений (рис. 5).

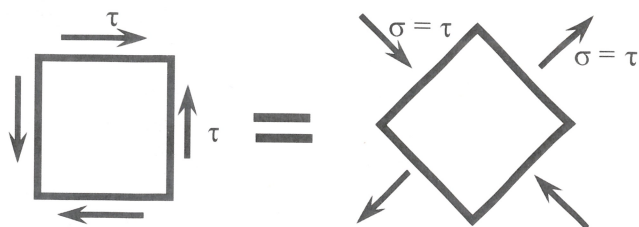


Рис. 5. Схема, демонстрирующая эквивалентность сдвиговых и одновременных сжимающих и растягивающих напряжений

Задача в этом случае становится формально двумерной. Однако для получения корректных результатов, элементарная структурная ячейка материала должна содержать всю информацию о параметрах структуры материала вдоль, формально не участвующей в расчетах, оси.

Таким образом, если для расчетов будет принята ячейка, которая была принята при моделировании нормальных нагрузений, указанное условие будет выполнено автоматически.

Граничные условия, задаваемые в данном случае, будут выглядеть так, как показано на рис. 6.

Для выполнения первой группы ограничений для данного исследования все грани, кроме L и R (см. рис. 6), фиксируются путем ограничения перемещений, перпендикулярных данной грани.

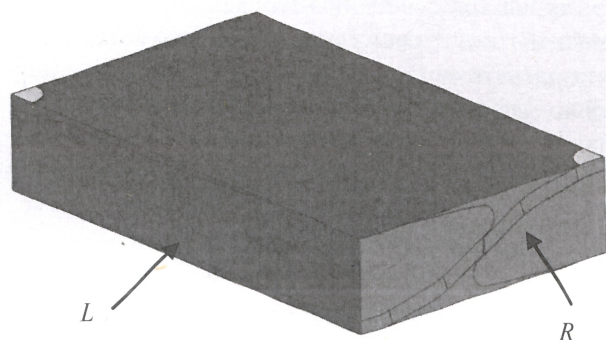


Рис. 6. Схема фиксации и нагружения исследуемой элементарной структурной ячейки АрПКМ при сдвиговых нагрузках

Для второй группы ограничений на оставшиеся две грани накладываются перемещения, например, сжимающие элементарную ячейку, к грани R , и растягивающие, к грани L , или наоборот.

Условия третьей группы ограничений в данном случае должны обеспечивать равенство напряжений вдоль осей, перпендикулярных этим граням.

Из условий третьей группы ограничений видно, что задача подбора является функцией одной переменной и может быть решена любым из известных способов решения таких задач, например методом хорд, который, учитывая линейность искомой функции, дает достаточно точный результат уже при третьей итерации.

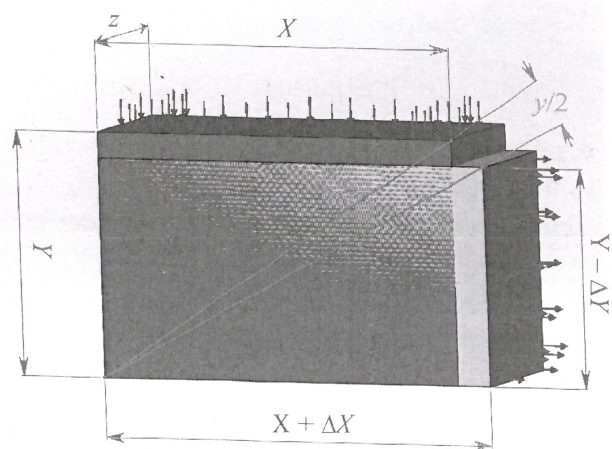


Рис. 7. Расчетная схема деформации сдвига исследуемой элементарной ячейки АрПКМ

Искомое значение модуля сдвига может быть получено из геометрических построений, приведенных на рис. 7.

$$\tau = \sigma = \frac{F_x}{xz} = \frac{F_y}{yz} \quad (16)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) - \arctg\left(\frac{Y - \Delta Y}{X + \Delta X}\right) \quad (17)$$

$$G_{xy}^{45} = \frac{\tau}{\gamma} \quad (18)$$

Принципиально важно в данном исследовании понимать, что значения модулей упругости при сдвиге исследуемой элементарной структурной ячейки относятся к осям, повернутым на 45° к граням ячейки в соответствии с условиями (см. рис. 5).

Для получения сдвиговых характеристик в других направлениях или для исследования зависимости сдвиговых характеристик от направления и угла сдвига следует лишь подготовить элементарную ячейку с необходимым направлением исследуемой структуры. Средства современных САД-модулей позволяют выполнить любую такую задачу без особых затруднений.

Таким образом, впервые предложен алгоритм компьютерного моделирования экспериментов сжатия—растяжения анизотропных структур АрПКМ, позволяющий с высокой точностью рассчитывать все основные физико-механические характеристики ортотропной модели $E_x, E_y, E_z,$

$\mu_{xy}, \mu_{yz}, \mu_{xz}, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$ для структур любой произвольной формы еще на стадии проектирования изделий из АрПКМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник. — М.: Машиностроение, 1987. — 224 с.
2. Ашкенази Е. Н., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: — Л.: Машиностроение, 1980. — 247 с.
3. Шалгунов С. И., Трофимов Д. А., Соколов В. И., Симонов-Емельянов И. Д. Модель, анализ 3D-структуры и метод расчета физико-механических характеристик армированных полимерных композиционных материалов конструкции из композиционных материалов // Конструкции из композиционных материалов. 2022. № 3. С. 10—14.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
5. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 832 с.
6. Рабинович А. Л. Введение в механику армированных полимеров. — М.: "НАУКА", 1970. — 482 с.

Algorithm for calculating effective elastic characteristics of anisotropic structures of reinforced plastics using CAE software packages

D. A. TROFIMOV, I. D. SIMONOV-EMELIANOV
FSBEIHE "MIREA — Russian Technological University"
(Institute of Fine Chemical Technologies named after M. V. Lomonosov),
Moscow, Russia

S. I. SHALGUNOV, V. I. SOKOLOV
АО "NPO Stekloplastik"
Moscow region, Solnechnogorsk district, settlement Andreevka, Russia

For the first time, an algorithm for calculating the elastic characteristics of an orthotropic model of anisotropic structures using CAE software packages is proposed. The algorithm is based on determining the effective elastic characteristics of an elementary 3-D cell of a reinforcing polymer composite material of arbitrary structure using the finite element method (FEM). The algorithm is characterized by high accuracy in determining all nine characteristics of the orthotropic model of the structure under study.

Keywords: elastic characteristics, orthotropic model, CAE, FEM, reinforced polymer composite materials.